

Pierre-Antoine PONTOIZEAU  
Institut de Recherches de Philosophie Contemporaine (France)

## **Des limites de l'arithmétique de Peano à la pensée spéculative des objets relationnels<sup>1</sup>**

**Abstract:** This article studies a few key concepts in the thought of Peano, namely those which proved important for the formulation of the axioms. The presence of these concepts shows that the arithmetic uses other forms of abstraction in the very moment when the mathematician tries to construct its foundations. This process requires judgments which, by the way, are not mathematical operations. This limit is the result of the presence of relational objects: *equivalence*, *congruence*, *abstraction*. They reveal the presence of the speculative thinking in the work of the mathematician and they legitimize the transition to another language: the speculative.

**Keywords :** arithmétique, concept, limite, spéculation, objet relationnel

### **1. Introduction**

Nous avons travaillé dans notre dernier article *Du formalisme au métalangage : Introduction à un discours sur les relations et les concepts* sur la relation des mathématiques aux concepts qui les fondent et aux relations qui font de ses objets « *des objets relationnels polysémiques manifestés par la pratique mathématique et dont la connaissance requiert un travail sur le sens* » (Pontoizeau 2016, 47). Nous consacrerons cet article à une compréhension de ces objets relationnels à partir de l'arithmétique de Peano. Celle-ci cristallisa une recherche sur les

---

<sup>1</sup> Cet article est aussi un hommage aux logiciens et philosophes des sciences francophones dont tout particulièrement Louis Couturat (1868-1914) professeur aux universités de Toulouse puis de Caen et au Collège de France et Arnold Reymond (1874-1958) professeur aux universités de Neuchâtel puis de Lausanne.

fondements des mathématiques par la formalisation d'une algèbre élémentaire. Les italiens dont Padoa, Burali, Forti et Peano travaillèrent à une logique déductive manifestant les procédés de démonstration et de déduction utilisés par les mathématiques. Pourtant, l'examen du schéma de récurrence de Peano montrera l'existence d'implicites. Il favorisera l'exploration du passage à ces objets relationnels, au-delà du chemin limitatif de l'axiomatique interne des mathématiques. Nous mettrons en application les enseignements de ce précédent article dans le but de témoigner d'une pensée au-delà des mathématiques. Et ce, d'autant plus aisément que la doctrine de la séparation et le principe de parcimonie – posés comme les règles absolues et intangibles de la logique analytique par G. d'Occam – ont eux-mêmes montré leurs limites<sup>2</sup>. Cet article a donc pour but de montrer la voie d'une continuité de la pensée des mathématiques vers celle plus spéculative des objets relationnels. En cela, il s'agit de s'entraîner, car l'exercice n'est pas familier :

« Peu d'hommes sont suffisamment entraînés à distinguer un objet savant d'une chose pensée. » (Heidegger 1966).

En effet, cet exercice propose de quitter les routines des évidences logiques et des axiomatiques temporaires, soit l'utilisation mathématicienne des objets logiques et arithmétiques dans des actes opératoires. Il s'agit de prolonger la pensée au-delà du langage mathématique afin d'accroître l'intelligibilité des langages par-delà leur insuffisante cohérence formelle<sup>3</sup>.

Par ailleurs, cet article doit à la lecture de Whitehead. Celui-ci interpelle la science dans son ouvrage *La fonction de la raison* où il insiste sur le lien entre la science et la philosophie, jugeant déraisonnable de faire fi de l'examen de la manière de pensée et de la présence des

---

<sup>2</sup> Nous partageons le diagnostic de F. Patras quant à cette séparation possible et fructueuse mais tout aussi illicite et illégitime au regard de l'incomplétude et de la crise des fondements de l'arithmétique : « Les mathématiciens sérieux n'auraient pas à se préoccuper de philosophie, sinon peut-être à titre privé et sans que cela interfère avec leur écriture mathématique. C'est bien évidemment un choix illégitime, car toute forme de mathématiques est gouvernée par des options épistémologiques qui, pour demeurer tacites, n'en sont pas moins décisives dans l'orientation thématique et programmatique des travaux. Pour autant, ce choix néfaste, dont les conséquences désastreuses n'ont cessé de se faire sentir, a été accepté à peu près unanimement. » (Patras 2014, 88).

<sup>3</sup> Nous tentons ici d'aller au-delà sans pour autant prétendre à la même visée que F. Patras, car nous ne préjugeons pas du résultat : « Rendre compte des différents aspects de l'effectivité et de la computabilité sera l'un des devoirs d'une théorie unifiée et renouvelée de la connaissance mathématique. » (Patras 2014, 135).

objets de la pensée d'où l'intérêt de Peano<sup>4</sup>. Il fut à la jonction de cette pensée mathématique à la recherche de sa fondation dans les limites des objets mathématiques et de la logique analytique qui tentera de répondre à la question des fondements ultimes sans y parvenir. Cette pensée des objets relationnels ouvre ici la voie à l'examen des mathématiques, non comme seule science de ces données dites objectives, mais bien en tant qu'acte de la pensée qui participe d'une intelligence par-delà l'usage de ces objets dans leurs dérivations et développements. Voilà pourquoi Peano mérite attention et respect dans cette dernière tentative mathématique d'écrire une science récurrente et indépendante. La compréhension de cet échec autorise d'aller plus avant.

## 2. Exposé de l'arithmétique de Peano

Giuseppe Peano publie en 1889 son œuvre consacrée à l'axiomatisation de l'arithmétique. Son objectif est de la fonder à partir de quelques axiomes dans cette présentation élémentaire et suffisante. Pour se faire, il introduit quelques symboles primitifs dans un langage de base. Les symboles sont les suivants : la constante 0, la fonction unitaire  $S$  dites du successeur signifiant qu'à un nombre entier  $n$  suit un entier  $n+1$ . La relation d'égalité  $=$ . Les variables usuellement nommées  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Les fonctions d'addition et de multiplication  $+$  et  $\times$ . Le quantificateur universel  $\forall$ . Disposant de ce langage élémentaire, Peano présente les axiomes de l'arithmétique élémentaire, cet ensemble constituant le schéma de récurrence.

### *Schéma de récurrence de Peano*

1. 0 est un entier naturel (donc l'ensemble des entiers naturels n'est pas vide).
2. Tout entier naturel  $n$  a un successeur, noté  $s(n)$  ou  $S_n$ .

---

<sup>4</sup> Dans un processus critique de la norme de la pensée, Whitehead conteste cette division-bifurcation et préfère indiquer la voie d'une philosophie portant sur l'exercice même de la pensée : « Le raisonnement scientifique est entièrement dominé par la présupposition que les fonctionnements mentaux ne font pas à proprement parler partie de la Nature. Aussi, méconnaît-il tous ces antécédents mentaux que l'humanité à l'habitude de présupposer comme efficients dans la conduite des fonctionnements cosmologiques. En tant que méthode cette procédure se justifie entièrement, pourvu que nous reconnaissons les limitations qu'elle implique. Ces limitations sont tout à la fois évidentes et indéterminées. La mise à jour progressive de leur définition, c'est l'espoir de la philosophie. » (Whitehead 1969, 201).

3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur (l'ensemble des naturels a un premier élément).

4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.

5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est égal à  $\mathbb{N}$  (principe de récurrence).

Posons quelques éléments de méthodes. Nous considérons que les axiomes ne sont pas des assertions fondamentales mais bien le résultat d'une pensée dont l'objectif est la construction d'une architecture élémentaire où les propriétés ont une fonction de socle de base en vue d'une extension ultérieure des raisonnements et modèles mathématiques. De ce fait, ces axiomes procèdent d'une démarche de simplification à quelques symboles et règles qui font l'objet d'un jugement en vertu de critères extérieurs aux axiomes eux-mêmes. Cet examen va révéler ces objets relationnels, tout à la fois antérieurs et postérieurs puisque la pensée mathématique cherche à se fonder dans un regard rétrospectif, soit son archéo-logie tout en ayant une visée par une intention eschatologique – selon l'expression de Ladrière<sup>5</sup> – soit sa futuro-logie.

Cet examen pourrait s'inspirer de celui entrepris par Husserl dans la *Krisis*. Il s'inspirerait des leçons de Brentano et de l'intentionnalité présidant aux conditions de la formalisation mathématique. Il nous guiderait vers la psychologie et les travaux ultérieurs de Piaget quant à la genèse des nombres et des aptitudes au calcul dans les processus d'apprentissage<sup>6</sup>. Il intégrerait enfin l'héritage de Frege faisant l'économie de la genèse des nombres pour les poser là, dans leur présence, abstraction faites de leur construction. C'est pourquoi les idéalités mathématiques ne sauraient être interrogées seulement en termes génétiques car le mathématicien manipule les nombres comme le philosophe l'alphabet, sans se préoccuper de rendre compte de cet outil

---

<sup>5</sup> Ladrière révèle le projet inachevable en quête de son terme par l'accomplissement de l'actualisation : « Le système formel est-il entraîné dans une sorte de transgression indéfinie de ses limites, qui se manifeste de façon négative par les faits de limitation et de façon positive par la possibilité de construire des systèmes indéfiniment extensibles. » (Ladrière 1957, 441).

<sup>6</sup> Piaget privilégie l'apprentissage des cardinaux par des opérations logiques de correspondance terme à terme négligeant l'ordinal et les suites numériques. A l'inverse, Gelman privilégie le dénombrement dans la collection, assimilant ordinaux et cardinaux. Ces psychologues reproduisent les controverses des mathématiciens sur la nature des nombres.

élémentaire. Cet examen révèle donc les références non-spécifiées : l'implicite de la pensée mathématique.

### 3. Examen de l'arithmétique de Peano

A la lecture de ses propositions, s'observe que Peano décline cinq concepts dans l'organisation de sa pensée. Au titre des symboles élémentaires il utilise des *variables* ( $x$ ,  $y$ ), des *opérations* ( $+$ ,  $\times$ ), une *relation* ( $=$ ). Au titre de l'organisation des propositions élémentaires : des *axiomes* et plus encore le *schéma*, soit la construction de cet ensemble de propositions dont la cohérence et la simplicité répondent à l'intention d'un corpus fondateur de l'arithmétique. Etudions ces cinq concepts qui organisent sa pensée.

Les *variables*. Elles ne sont déjà plus les nombres de l'arithmétique élémentaire. Le recours à l'alphabet traduit la nécessité de s'abstraire de la valeur du nombre au profit du concept de nombre indépendamment de ses valeurs. L'objet est alors abstrait une seconde fois. Et chaque lettre vient poser l'hypothèse d'un nombre sans intérêt pour sa valeur circonstancielle. Mais qu'est-ce qu'un nombre sans valeur ? La notion même de variable interpelle puisqu'elle introduit le concept de nombre hors des nombres eux-mêmes. Et cette définition du nombre a occupé Frege ou Dedekind par exemple sans pour autant clore les discussions quant à la définition du concept<sup>7</sup>.

Les *opérations*. Elles ne sont aucun des nombres et sont en soi problématique puisqu'à certains égards le nombre existe sans opération par le simple constat d'une succession. Cet usage des ordinaux, le  $n^{\text{ième}}$  ne préjuge pas d'une opération mais d'une position dans la suite d'éléments dont il est le  $n^{\text{ième}}$ . Il n'en demeure pas moins dans son unité propre, le  $n^{\text{ième}}$  étant l'égal du premier, à la nuance de sa seule position. Certains

---

<sup>7</sup> La définition du concept de nombre pour Dedekind : « Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses » La création des nombres (Dedekind 2008, 134). Pour Frege, il s'agit de l'étendue d'un concept qui renvoie aux classes d'équivalence bijective d'ensembles finis. Pour Poincaré, l'entier naturel est indéfinissable car cette notion précède toute tentative d'en donner une définition formelle. Le lecteur se reportera avantagusement à *La possibilité des nombres* de Patras.

diront toutefois que cet ordinal nécessite le cardinal, soit le nombre actant les éléments de l'ensemble considéré. Peut-être. Mais notons surtout que ce concept d'opération est peu investi alors qu'il représente la base de la pratique algébrique. Russell et Whitehead abordent avec difficultés les « *relations et classes dérivées d'une fonction descriptive double* »<sup>8</sup>. En effet, opérant selon des principes d'ajout ou de retrait, l'opération n'est pas une simple relation. Elle en diffère, induisant la sommation qui s'exerce par la disparition des opérations lors de la simplification calculatoire. Du point de vue strict des symboles,  $3+1$  n'est jamais égal à 4 mais par exemple égal à  $2+2$ . La sommation oriente l'égalité, celle-ci ne se confond pas à une relation.

La *relation*. Elle exprime une autre nature de concept établissant un type de rapport entre deux nombres ou deux propositions. Ce concept échappe aux nombres eux-mêmes inaugurant une autre dimension par la mise en relation. Malgré l'usage de l'égalité traduisant cette volonté de résolution par simplification dans une sommation, il faut considérer les propositions autrement pour établir une relation. Chaque membre est une proposition et les relations renvoient à l'infinité des verbes qui les nomment. Ces relations s'écrivent en  $xRy$  et pouvant être asymétriques ou transitives, elles ne s'opèrent pas algébriquement entre elles<sup>9</sup>.

Les *axiomes*. Ce sont des propositions qui utilisent les concepts précédents puisque la rédaction proposée par Peano use plus des concepts que des nombres eux-mêmes dans un langage. Or, la sémantique exigerait que chacun soit déterminé avant usage. L'axiome, abstraction faite de son contenu, constitue une figure logique dont la propriété spécifique n'est pas incluse dans l'exposé axiomatique. Pourtant, la logique préjuge de cette fonction spécifique accordée à certaines propositions. Est

<sup>8</sup> Sackur consacre son chapitre III au concept de succession et sa 4<sup>ème</sup> section aux relations et opérations dans les *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead où il montre que les auteurs devraient s'affranchir de la théorie de la relation pour rendre compte de l'aspect calculatoire ; rappelant que Wittgenstein affirme cette irréductibilité de l'opération à la théorie des fonctions et des relations.

<sup>9</sup> Couturat décrit très précisément le calcul des relations (p. 29 à 35) et nous attirons l'attention ici sur deux enseignements : « Si  $x$  est le frère de  $y$ , et  $y$  le père de  $z$ ,  $x$  est l'oncle de  $z$ . Ainsi la relation oncle est le produit relatif des relations frère et père, ce que l'on exprime dans le langage en disant : « l'oncle est le frère du père ». »  
« Il faut se garder de confondre le produit logique de deux relations avec le produit relatif. » (Couturat 1905, 30, 33).

axiome, ce qui est évident pour les anciens, les modernes précisant qu'il s'agit plutôt d'un principe en hypothèse, soit un postulat. Ces postulats permettent la déduction d'autres propositions en précisant des définitions formelles dont le principal mérite est de préciser le terme au-delà d'un usage ordinaire et souvent équivoque. L'axiomatique tente ainsi de purifier les usages du langage ordinaire dans un langage formalisé par l'univocité transitoire des premiers termes dans des définitions explicites. Or, la théorie de la définition et la question du sens univoque semblent soulever quelques autres concepts implicites inhérents à une forme de pensée et à son projet : la logique.

Le *schéma*. Il accumule des axiomes et l'ensemble représente un tout cohérent répondant à un objectif d'un tout fondamental. Il souligne l'existence de rapports non arithmétiques entre les axiomes, manifestant une architecture de concepts exposés dans ces propositions reconnues suffisantes par un jugement qui embrasse ce tout dans la compréhension de cette correspondance du schéma à une référence. Or, celle-ci est implicite, puisqu'il s'agit de satisfaire un objectif de complétude inapparent dans le formalisme lui-même. La règle établissant la suffisance du schéma est en dehors de l'exposé du schéma mais bien dans l'exercice d'un jugement donnant crédit au projet. Ici, la limite tient à cette partie conceptuelle absente des propositions et pourtant garante de leur reconnaissance ou de leur contestation.

#### 4. Des limites des concepts de l'arithmétique

La limite de l'exposé de Peano tient à deux omissions. La première est celle de ces *concepts* présentés précédemment. L'arithmétique ne les contient pas. La seconde est celle des *jugements* ; soit ces actes de la pensée à propos de ces concepts en dehors des calculs. Ces jugements émanent du projet de fondation et de la manière d'établir avec certitude le schéma de récurrence, soit le fait de le juger en vertu des critères qui sont aussi des concepts implicites en dehors de l'exposé.

Ces *concepts* implicites dépassent donc les symboles en usage dans l'arithmétique. Ainsi, les axiomes de Peano fonctionnent en une succession de définition incluant de nouveaux termes : nombre, successeur, égalité, etc. En abandonnant l'écriture de l'arithmétique, Peano crée ces notations qui sont autant de nouveaux concepts : du nombre aux variables, de l'addition à une fonction de successeur, d'une égalité à une relation sans oublier la négation. En pensant l'arithmétique,

celle-ci devient un objet de pensée et il effectue alors un déplacement de sa représentation par une régression *in abstracto*, ce qu'il explique dans son introduction :

« J'ai indiqué par des signes toutes les idées qui apparaissent dans les fondements de l'arithmétique, de façon à ce que chaque proposition soit énoncée à l'aide de ces seuls signes. » (Peano 1889, iii).

Pourtant, Russell ne manquera pas de lui reprocher que ces idées primitives ne suffisent pas à assurer l'existence de la succession des entiers naturels. Et Russell n'y parviendra pas non plus parce que ces concepts interagissent sans jamais parvenir à une définition première où à une référence auto-suffisante. La fondation des mathématiques échoue dans cette création d'éléments suffisants et autonomes. Et pour cause, elle utilise des objets relationnels dérivant d'un apprentissage de l'usage des abstractions, faisant de celles-ci les objets d'une expérience et d'une représentation distinctes de l'arithmétique.

En effet, la question des régressions infinies ou des suites infinies occupent les esprits cherchant à formuler les premiers principes, les postulats ou les axiomes, et ce, afin d'interrompre ce mouvement insensé. Cette question de l'origine, de la légitimité et de la fondation, par la raison suffisante – pour reprendre l'expression leibnizienne de la *Monadologie*<sup>10</sup> – a une prégnance qui justifie de formaliser ne serait-ce qu'une syntaxe première, soit des règles et des symboles répondant à cette exigence conceptuelle au-delà de l'unique usage des nombres eux-mêmes.

C'est pourquoi les *jugements* révèlent une part de la pensée mathématique dans son archéo-logie et dans sa futuro-logie : le projet et ses finalités ; soit cette motivation à penser la résolution d'une question demeurée, selon Peano et ses pairs, en suspens. La démarche même de Peano s'inscrit dans cette histoire où il reconnaît apporter sa contribution à la résolution du problème<sup>11</sup>. Toute l'histoire contemporaine de la

<sup>10</sup> Leibniz développe ce concept de « raison suffisante » ou « raison qui suffit » en la définissant comme suit au paragraphe 8 des *Principes de la nature et de la grâce* fondés en raison : « Ainsi, il faut que la raison suffisante, qui n'ait plus besoin d'une autre raison, soit hors de cette suite contingente, et se trouve dans une substance, qui en soit la cause, ou qui soit un être nécessaire, portant la raison de son existence avec soi ; autrement, on n'aurait pas encore une raison suffisante, où l'on puisse finir. » (Leibniz 1972, 400).

<sup>11</sup> Peano écrit : « Les questions relevant des fondements des mathématiques, bien que beaucoup travaillées de nos jours, manquent encore d'une solution satisfaisante. Les difficultés les plus grandes proviennent de l'ambiguïté du discours. Pour cette raison, il

logique et des mathématiques atteste de cette poursuite des origines. Les logiciens et les philosophes des mathématiques s'attachent à l'archéologie pour construire les outils premiers dont l'univocité chère à Frege afin de satisfaire l'objectif de purification se libérant des œuvres confuses d'interprétation à laquelle le langage ordinaire est toujours confronté, d'où sa fragilité. Lorsque les mathématiciens pratiquent leur science et construisent des modèles, la complexité croissante de leurs travaux expose toujours aux mêmes controverses des concepts qu'ils utilisent selon des acceptions variées. Percevoir des nombres ou des fleurs serait assez semblable en ceci que la perception des abstractions n'est pas plus univoque que celles des fleurs. Des axiomes de Peano à l'expression de la théorie des ensembles de Russell, jamais les auteurs n'ont satisfait l'ambition qui est la leur. Chaque fois, leurs propositions donnent lieu à des controverses et à une pluralité d'interprétations rendant la quête de l'univocité éphémère.

Ces jugements établissent une relation à l'objet symbolique qui est posé. En cela la pratique mathématique se détermine par sa méthode et son objet. Le jugement admet l'objet en le reconnaissant en vertu des critères qui le font juger. Jugeant des objets, cette intelligence explicite leurs définitions, laissant dans l'ombre les principes de son jugement. Dès lors que ceux-ci deviennent aussi des objets, leur définition s'explicite sans pour autant rendre compte d'autres critères implicites de jugement. Ce jeu de clair-obscur déplace sans résoudre. Et il y a une raison à l'insaisissable de ces concepts et des symboles les représentants. Ils sont des objets relationnels où la pensée s'exerce en s'appuyant sur certains pour construire un contenu de penser et sur d'autres pour juger et progresser dans le cheminement même de cette pensée<sup>12</sup>. Un exemple suffira. L'unité arithmétique au sein de l'ensemble des entiers naturels est formellement indivisible. Cette propriété caractérise fondamentalement l'unité élémentaire. Or, dès que l'opération de division est introduite, apparaissent les décimaux et la fragmentation de l'unité élémentaire antérieurement indivisible. D'élément, elle devient là une grandeur divisible. Ainsi, chaque objet voit sa compréhension et ses définitions

---

est de la plus haute importance de considérer attentivement les mots que nous utilisons. J'ai pris la décision de faire cet examen, et présente dans cet article les résultats de mon étude, ainsi que des applications à l'arithmétique. » (Peano 1889, iii).

<sup>12</sup> Reymond décrit cette complexité inhérente aux nombres eux-mêmes : cardinaux et ordinaux : « Ce qui est à la base de nos connaissances mathématiques les plus élémentaires, ce n'est pas un ensemble de données simples et autonomes, mais un certain nombre de concepts synthétiques complexes qui dérivent eux-mêmes d'expériences complexes sur la réalité. » (Reymond 1932, 178).

évoluer dans des contextes successifs où ses relations interagissent, surdéterminant une première acception d'une seconde puis d'une autre. Et cette évolution des définitions montrent que le mathématicien s'appuie sur des concepts évolutifs qui font l'objet de ses spéculations et surtout de ses jugements qui sont bien autre chose que de simples opérations.

Les mathématiques et la logique analytique manipulent en permanence cette intrication des concepts et des jugements. Celui qui les pose les juge en les posant et il les pose pour juger. Reymond est très explicite pour nous rappeler cela :

« Il faut prendre pour point de départ des opérations de la pensée le jugement lui-même et non pas le concept, car celui-ci est une donnée complexe et dérivée... ce qui est non moins certain, c'est que le concept ne prend corps et ne se précise que dans et par le jugement, et c'est pourquoi il avant tout condensation de jugements, antérieurement faits et point de départ de jugements possibles » (Reymond 1932, 77-78).

Les objets relationnels procèdent de cette intelligence où des définitions interagissent dans une pensée tout à la fois antérieure et postérieure à l'exercice logicomathématique dans sa dimension calculante, et exécutante<sup>13</sup>.

## 5. Des mathématiques aux objets relationnels

L'objet relationnel (o.r.) dépasse donc les simples usages arithmétiques parce qu'il exprime une figure de pensée. Ces o.r. sont inhérents aux mathématiques. Dans les *Fondements de l'Arithmétique*, Frege construit une théorie analytique fondant les nombres par l'application de la théorie des ensembles en mobilisant l'o.r. d'*équivalence*. Examinons ici trois de ces o.r. aux sources de l'arithmétique : l'*équivalence* chez Frege, la *congruence* chez Whitehead et l'*abstraction* chez Husserl.

---

<sup>13</sup> Husserl distingue la pensée transcendantale de la technicisation interne des opérations logico-mathématique qu'il décrit en ces termes : « Un simple art d'obtenir des résultats grâce à une technique de calcul qui suit des règles techniques. Le sens réel de vérité de ces résultats s'obtient seulement dans une pensée dont la pénétration est bornée à ses thèmes spécifiques et à sa mise en œuvre effective... On opère avec des lettres, des signes de connexion ou de rapport (+, ×, =, etc.) et d'après les règles du jeu de leur coordination, d'une façon qui en fait ne diffère sur aucun point essentiel de la façon dont on opère au jeu de cartes ou d'échecs. » (Husserl 1976, 54).

L'équivalence est d'abord une simple relation d'éléments égaux au titre d'une propriété ou d'un rapport. Pourtant, ce concept a suscité une polémique digne des querelles scolastiques entre Husserl et Frege. Pour le premier, l'équivalence est le résultat d'une première abstraction procédant au dénombrement fixant la numération, soit un cardinal. L'équivalence des numérations de deux ensembles résulte d'un second procédé de comparaison de ces cardinaux. Pour le second, elle s'appuie sur une confusion des termes : égalité, même et identité. Frege transforme la logique pour inverser les attributs devenant sujets de la comparaison, faisant de la propriété le sujet d'équivalence, niant de ce fait les objets sous-jacents des propriétés<sup>14</sup>. Ce renversement syntaxique lui permet de réduire l'objet à la seule propriété qui autorise de confondre identité, même et égalité, puisque seule la propriété est prise en compte dans le raisonnement. Cette abrogation des différences se fait car, la dîtes propriété, devient le seul concept pour lequel les équivalences s'expriment.

Or équivaloir bute bien sur l'extension de cette fonction selon qu'on simplifie les éléments à la seule propriété permettant l'équivalence ou qu'on admette qu'en dehors de cette propriété, d'autres valent différence. Le point de vue et l'intention même diffèrent dans cette controverse opposant Husserl et Frege. Et ce dernier n'est pas dénué d'intentions dans son projet de confondre des concepts pour réduire les rapports aux seules équivalences. D'ores et déjà, s'impose le constat que la construction des lois logico-mathématiques se fait en dehors des calculs ; dans ces travaux de définition des o.r.

La congruence exprime la constance de l'unité souvent confondue avec la simple égalité d'une mesure prise en vertu d'une référence-étalon. Et l'idée de cette constance est contraire à l'expérience des déformations de toutes sortes qui altèrent inexorablement l'étalon de mesure. En géométrie ; la congruence des figures suppose la libre mobilité, soit l'absence de déformation d'une figure dans l'espace. Cette constance-là nécessite un axiome d'unité de l'espace : homogène et continu évitant ses altérations dans l'hypothèse où l'espace serait instable, courbe par exemple. En arithmétique, il n'existe pas de référent physique. La congruence est alors une simple hypothèse, pour ne pas dire une pratique résultant d'une convention commode et « l'humanité s'accorde sur une

---

<sup>14</sup> Frege effectue ces glissements syntaxiques en passant de la formulation « *les segments sont identiques ou égaux en longueur* » à « *la longueur des segments est la même* ». La propriété devient l'objet-sujet de la proposition justifiant l'équivalence sans restriction de son extension puisque les objets sous-jacents sont minorés.

interprétation arbitraire de la conscience sensible quand il n'y a rien dans la nature pour la guider » commente Whitehead<sup>15</sup>. La pratique de la constance n'est donc pas dans l'objet abstrait mais dans une attitude de reconnaissance continue assurée par une perception, qu'elle soit sensible ou abstraite. Cette théorie de la congruence suscita des spéculations et anima quelques controverses entre Poincaré et Russell. Elle atteste aussi de la présence de ces o.r. au-delà des mathématiques sans lesquels leur exercice est impossible.

En effet, la congruence renvoie à la référence implicite qui sert de point d'appui à l'acceptation de cette constance de l'unité ou de la mesure soit les théories de la connaissance de chacun des auteurs si ce n'est leur anthropologie qu'ils font vivre dans leurs expressions ; celles-ci font controverses. Russell renvoie à la nature, à la réalité, à la perception et aux faits observables. Poincaré lui objecte la discipline de l'abstraction pour laquelle aucun de ces arguments ne résistent. L'unité de mesure, soit la puissance représentative de l'unité inclut toute sorte de dimensions réelles mais elle n'est pas corrélée à des réalités dans l'usage strictement mathématique des nombres. C'est pourquoi la congruence admettant la continuité de la valeur représentative de l'unité est une pure convention par une reconnaissance *in abstracto*, soit un phénomène de la conscience assurant le continuum rationnel de la véracité de la valeur de l'unité, relativement à elle-même ; celle-ci n'ayant aucune référence hors les nombres<sup>16</sup>. Cette possibilité même de répéter fonde le langage des mathématiques dont les constructions requièrent la congruence. L'o.r. transcende la simple arithmétique parce que la reconnaissance par abstraction est une œuvre de l'intelligence en acte se fiant à elle-même.

*L'abstraction* décrit le procédé qui préside à la constitution « *des objets abstraits de pensée* » selon l'expression de Cantor. Manipulant les concepts, il ne s'agit plus là de calculs, mais d'interactions des sens discutés et accordés à ces objets dont les relations dépendent des perceptions de l'esprit : les positions prises par les auteurs. Husserl distingue les sciences de la nature des sciences de l'esprit. Les premières

---

<sup>15</sup> Dans *Le concept de la nature*, p. 167.

<sup>16</sup> Reymond résume d'une formule incisive le phénomène de congruence dans son chapitre sur la vérité et la logique normative faisant jonction entre les faits et les actes de l'intelligence, s'accordant à Whitehead sur cette pratique fondatrice de la reconnaissance : « Le principe d'identité, par exemple, suppose que dans l'acte instantané du jugement les concepts envisagés restent identiques à eux-mêmes. » (Reymond 1932, 41).

tirent toute leur légitimité de la rectitude des observations et de l'organisation des expériences structurant les perceptions dans des représentations et des constructions rigoureuses répondant aux critères de jugement des principes de la raison. Mais cette délimitation de l'expérience aux seules perceptions des choses de la nature est insuffisante, car elle omet la connaissance des choses qui les fondent dans l'esprit :

« En ce qui concerne la nature dans sa vérité scientifique, elle n'est indépendante qu'apparemment et n'est amenée qu'apparemment pour elle-même à la connaissance rationnelle dans les sciences de la nature. Car la vraie nature dans son sens scientifique est le produit de l'esprit du chercheur des sciences de la nature, elle présuppose donc la science de l'esprit. » (Husserl 1976, 380).

En reconnaissant aux objets mathématiques leur statut de pure forme limite, Husserl invite à transcender cette abstraction pour tendre par la méthode de la réduction eidétique à l'expression des phénomènes qui apparaissent dans la conscience. Dans cette conférence de mai 1935 intitulée *La philosophie dans la crise de l'humanité européenne*, il souligne la privation des raisons ultimes d'une science obscurcit par ses limites et il reproche au naturalisme son absurdité qui le rend « incapable de saisir les problèmes de l'esprit »<sup>17</sup>.

Ces trois o.r. sont irréductibles à des calculs parce qu'ils portent sur le sens, à la façon dont Gödel annonçait qu'une théorie des concepts est nécessaire afin de constituer un autre langage au-delà de l'arithmétique et de la logique selon d'autres conventions. L'équivalence, la congruence et l'abstraction s'organisent dans une pensée spéculative. Reymond rappelle cette caractéristique intrinsèque de l'exercice spéculatif :

« Impossible de comprendre l'infini sans le fini, le continu sans le discontinu, etc. Les antinomies reposent essentiellement sur l'incapacité où nous sommes de saisir discursivement un quelque chose qui se suffit

---

<sup>17</sup> Husserl n'hésite pas à mettre cette question de la phénoménologie transcendantale dans une perspective historique et politique lié à une conception de l'Europe considérée comme le lieu de la « téléologie historiques de buts rationnels infinis » qui témoigne de l'enjeu libérateur présent dans une pensée au-delà des mathématiques : « La crise de l'existence européenne ne peut avoir que deux issues : ou bien le déclin de l'Europe devenue étrangère à son propre sens rationnel de la vie, la chute dans la haine et la barbarie, ou bien la renaissance de l'Europe à partir de l'esprit de la philosophie, grâce à un héroïsme de la raison qui surmonte définitivement le naturalisme. » (1976, 382)

à lui-même et qui soit sans rapport avec quoi que ce soit d'autre. » (Reymond 1932, 78).

L'o.r. participe à l'énoncé d'une pensée qui est à la fois expression et représentation, proposition et jugement. Même si le langage formalisé est précieux, il est maintenant ici question d'autre chose : les pensées spéculatives.

## 6. Des modalités de la pensée spéculative

Nous énonçons à la fin de notre précédent article que « les concepts ne sont pas des objets absolus et séparés mais des objets performatifs en interaction avec l'auteur dont ses pensées usent de ces instruments d'expression et d'influence d'où un travail sur la praxis. Ils ne sont pas des objets adéquats ou en correspondance avec des objets extérieurs éprouvés selon des pratiques existentielles mais des objets spéculatifs manipulés par une intelligence active ; soit une autre sorte de perception » (Pontoizeau 2016). La logique, science normative des règles de la pensée juste ayant ses limites propres, nous avons constaté que Peano usait justement de concepts en dehors de l'arithmétique et sans lesquels son schéma de récurrence ne saurait se concevoir. Outre ces concepts, ils sont accompagnés d'un jugement, soit d'un acte de l'intelligence. Et celle-ci est bien orientée, visant quelque chose dans son acte. Il est aussi question d'acte de l'intelligence lorsqu'il s'agit de légitimer *in fine* le principe de récurrence dont Poincaré sait qu'il est la condition de possibilité des mathématiques assemblant l'équivalence et la congruence ; cette dernière tenant compte d'un mouvement dans des temps et des espaces, dont ceux de la seule pensée dans ses mouvements intérieurs. Poincaré écrit :

« Pourquoi donc ce *jugement* s'impose-t-il à nous avec une irrésistible *évidence* ? C'est qu'il n'est que *l'affirmation* de la puissance de *l'esprit* qui se sait capable de *concevoir* la *répétition indéfinie* d'un même *acte* dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une *intuition* directe et *l'expérience* ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre *conscience* » (Poincaré 2014, 41).

Ici, le mathématicien ne fait plus des mathématiques. Il parle de jugement, d'acte, d'affirmation, d'esprit, d'intuition, d'expérience, de conception, de conscience pour exprimer l'évidence de la répétition indéfinie. Comment le mathématicien peut-il convoquer autant de notions

extra-mathématiques pour fonder le principe premier de l'arithmétique ? Intuition dirons certains, réduction eidétique évoquerons d'autres, appel aux concepts penserons quelques-uns. Illusions affirmerons des nominalistes. Maintenant, il est loisible au lecteur de renoncer à cette pensée spéculative mais il est difficile d'en dénier la possibilité même ou de la disqualifier alors qu'à l'évidence pour Poincaré comme pour Whitehead et d'autres encore, il faut bien les convoquer pour affirmer la répétition indéfinie. Le choix du refus paraît peu convaincant comme l'est l'ultime tentative du réisme de Kotarbinski<sup>18</sup>. Celui-ci ne saurait interdire cette ouverture. Les controverses des mathématiciens manifestent plutôt leurs oppositions spéculatives parce qu'ils en ont une conception et un usage philosophique : logique, formaliste intuitionniste, etc.

Certes, les mathématiques se déploient dans leur pratique. C'est une première finalité. Mais sa futuro-logie n'est pas univoque. Son futur ouvre deux voies : celle de l'extension des modèles et de leurs usages et des rétroactions des autres appréhensions des mondes par la physique par exemple, celle bien différente de l'élévation vers la spéculation. La première transmute la rationalité par la considération d'une *inscription* dans une histoire où s'étend l'exercice mathématique toujours inachevée. C'est l'intelligence exercée en société entre mathématicien et avec les autres sciences. La seconde élève par l'adhésion de l'intelligence découvrant une altérité intérieure exercée en chacun dans une *révélation*. C'est sans doute la raison héroïque évoquée par Husserl, celle qui s'émancipe de son indépendance quelque peu stérile au profit d'une transformation fertile.

L'*inscription* du mathématicien tient à ses références puisqu'il participe d'une histoire où la thématization actualise successivement des réponses à des problématiques résultant de la manipulation des objets logico-mathématiques. Des entiers naturels aux transfinis se déroule une histoire. Lorsqu'à un siècle d'intervalle Gregory Perelman solutionne la

---

<sup>18</sup> Le réisme de Kotarbinski tente d'affirmer qu'il n'existe que des entités individuelles concrètes à la façon des nominalistes. Il dénonce les onomatoïdes, ces hypostases d'origine linguistique comme il les nomme aussi. En procédant à cette réduction, il élimine les abstractions. Or le procédé de réduction relève de la traduction tout en professant une métaphysique « négative » : le nominalisme. Sa position évolue vers cette éthique intellectuelle par l'exigence du concrétisme, soit l'attention à ne pas produire ces onomatoïdes. Le lecteur gagnera à la lecture des deux chapitres consacrés à Kotarbinski dans *La philosophie en Pologne 1918-1939* (p. 81 à 103).

conjecture de Poincaré formulée en 1904, il s'inscrit dans une histoire. Celle-ci est une composante effective d'une mathématique en création où le mathématicien se réfère à des travaux antérieurs. Le mathématicien s'inscrit aussi dans une architecture conceptuelle où il exerce une technicité dont le déploiement déborde ce premier mouvement. Il participe de controverses dans une recherche où les vues divergent parce que les spéculations s'inscrivent dans des croyances profondes traduisant le rapport que le mathématicien entretient avec ses propres actes. L'inscription tient donc à l'inachèvement et au legs des conjectures et travaux à poursuivre. Pour reprendre la formule de Husserl, le mathématicien agit dans cette « *téléologie historique des buts rationnels infinis* ». Cette *inscription* révèle en fait une institution invisible, celle du dépassement des limites historiques de chacun au profit d'une intelligence sociale où se transmettent les concepts, les théories, les controverses, les conjectures et problématiques confiées aux générations futures. Le mathématicien participe là d'une pensée dont il admet l'existence des auteurs et des textes, des concepts et des modèles qu'il s'approprie pour les manipuler de nouveau. Dans cette *inscription* s'effectue l'*entente de l'extériorité* par l'accueil de la présence des autres et des o.r.

La *révélation* relativise la théorie de la démonstration qui se donnait pour but de rendre raison des règles de la pensée. Cette pensée d'elle-même opérait pour expliciter ses opérations dans ses opérations mêmes. Elle usait d'un langage et construisait-révélaient des objets en les jugeant. Et cette théorie supposait que la pensée se réduirait à quelques actes premiers. La démonstration bute là sur sa limite soit l'aporie de son auto-démonstration. Poincaré montre par son langage même que la théorie de la démonstration ne suffit pas à démontrer le principe de récurrence ou de la répétition indéfinie. Au contraire, la pensée spéculative atteste de la création des mathématiques manifestant du même coup cette altérité intérieure de la pensée qui agit dans ces mouvements incessants où poser et juger se complètent. Très loin d'être une entreprise de réduction ou de régression à quelques inaccessibles atomes logiques, mathématiques ou physiques qui ne cessent d'échapper, la spéculation révèle une autre expérience, celle de l'intelligence des o.r. Toute pensée s'exerce dans des actes de confiance en soi à la façon d'un premier acte de foi au travers des o.r. qui ne se démontrent pas mais se définissent, se comprennent, se complètent en révélant dans la pensée que l'intelligence commence et s'accomplit dans sa continuité même en un Credo à saisir. Dans cette *révélation* s'effectue la *reconnaissance de l'intériorité* par la

présence à soi, Poincaré en fait incidemment la preuve en vertu d'un témoignage en forme d'aveu d'impuissance. L'intelligence n'a pas pour seul but de démontrer.

*Entendre l'extériorité*, c'est admettre qu'il y a là à côté quelque chose de posé en dehors de la pensée ou des expériences, *reconnaître l'intériorité*, c'est se manifester dans le fait même de la pensée qui bruisse au rythme d'une altérité, c'est là le miracle de l'intelligence en acte dans son développement unique se manifestant dans l'inestimable valeur de sa propre présence. Il se peut qu'à l'avenir, il faille transmuter le langage car, chemin faisant, deux termes ont été posés : la polysémie et la pluralité. Or, les langages ordinaires, formalisés ou la pensée spéculative des objets relationnels s'ordonnent peut-être dans un art interprétatif qui a autre chose à dire. En effet, la pensée spéculative caractérise ce nouveau langage au-delà de celui insuffisant des mathématiques. J'aimerais ici inviter les mathématiciens à initier cette pensée où leurs talents et ceux des philosophes ne seront pas de trop. Ce qui est à créer pourrait se nommer les mathématiques de la différence et de la pluralité ainsi que la pensée spéculative portant sur cette révélation dont le mathématicien use sans pour autant l'étudier alors qu'il est aux avant-postes. C'est un tout autre travail pour un nouveau cycle pleinement spéculatif.

Pour conclure ce cycle d'articles<sup>19</sup>, n'oublions pas que le raisonnement par le seul calcul fut le projet de Bacon qui inspira Descartes puis Leibniz jusqu'à la cybernétique de Wiener. Cet acte de foi selon lequel les mathématiques à elles seules sont et font le monde aura été une hypothèse. L'arithmétique est plus une science intermédiaire en ce sens qu'elle développe un usage particulier d'abstractions ordonnées dans leurs relations. L'exercice est intéressant et fructueux, mais la pensée ne s'arrête pas là. Les transfinis de Cantor ou la théorie du concept de Gödel sans oublier la *Krisis* de Husserl, et nous espérons nos modestes contributions, ont ouvert les voie-x de cette révolution de la pensée occidentale. Saurons-nous passer des objets pensants aux choses pensées et serons-nous les objets aliénés de l'univoque ou les sujets libres de la pluralité ?

---

<sup>19</sup> Je tiens à remercier la revue *Argumentum* et Constantin Salavastru qui m'ont accepté dans la revue depuis quatre années pour y publier cette série.

## References

- BELNA, Jean-Pierre. 1996. *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. Paris : Librairie Vrin.
- BRENTANO, Franz. 2008. *Psychologie du point de vue empirique*. Paris : Librairie Vrin.
- BRISART, Robert. 2002. *Husserl et Frege, les ambiguïtés de l'antipsychologisme*. Paris : Librairie Vrin.
- CANTOR, Georg. 2000. *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*. Paris : Editions Jacques Gabay.
- CAVEING, Maurice. 2004. *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris : Librairie Vrin.
- COUTURAT, Louis. 1905. *Les principes des mathématiques*. Paris : Editions Alcan.
- DEDEKIND, Richard. 2008. *La création des nombres*. Paris : Librairie Vrin.
- DUCRET, Jean-Jacques. 1984. *Jean Piaget, savant et philosophe*. Genève : Editions Droz.
- FREGE, Gottlob. 1971. *Fonction et concept*. Paris : Editions du Seuil.
- FREGE, Gottlob. 1969. *Les fondements de l'arithmétique*. Paris : Editions du Seuil.
- GARDIES, Jean-Louis. 1984. *Pascal, entre Eudoxe et Cantor*. Paris : Librairie Vrin.
- GELMAN, Rochel. 1978. *The child's understanding of number*. Cambridge : Oxford University Press.
- GÖDEL, Kurt. 1989. *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés*. Paris : Edition du Seuil.
- HEIDEGGER, Martin. 1966. *L'expérience de la pensée in QIII*. Paris : Edition Gallimard.
- HINTIKKA, Jaakko. 2007. *Les principes des mathématiques revisités*. Paris : Librairie Vrin.
- HUSSERL, Edmond. 1976. *La crise des sciences européennes et la phénoménologie transcendantale*. Paris : Editions Gallimard.
- LADRIERE, Jean. 1957. *Les limitations internes des langages formalisés*. Paris : Edition Gauthier-Villars.
- LAKATOS, Imre. 1984. *Preuves et réfutations*. Paris : Editions Hermann.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. 1972. *La monadologie*. Paris : Edition Aubier Montaigne.
- PATRAS, Frédéric. 2001. *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF.
- PATRAS, Frédéric. 2014. *La possibilité des nombres*. Paris : PUF.
- PEANO, Guiseppo. 1889. *Les principes de l'arithmétique, nouvelle méthode d'exposition, Turin, Bocca (Arithmetices principia, nova methodo exposita)*.

- 
- PIAGET, Jean, 1950. *Introduction à l'épistémologie génétique*. Paris : PUF.
- POINCARÉ, Henri. 2014. *La science et l'hypothèse*. Paris : Editions Flammarion.
- PONTOIZEAU, Pierre-Antoine. 2012. *Penser au-delà des mathématiques*. Paris : Edition Embrasure.
- POUIVET, Roger et REBUSCHI Manuel. 2006. *La philosophie en Pologne*. Paris : Librairie Vrin.
- REYMOND, Arnold. 1932. *Les principes de la logique et la critique contemporaine*. Paris : Librairie Boivin et Cie.
- SACKUR, Jérôme. 2005. *Formes et faits, analyse de la théorie de la connaissance dans l'atomisme logique*. Paris : Librairie Vrin.
- WHITEHEAD, Alfred North. 1969. *La fonction de la raison*. Paris : Editions Payot.
- WHITEHEAD, Alfred North, 2006. *Le concept de la nature*. Paris : Librairie Vrin.

