Denis MIEVILLE
Université de Neuchâtel (Suisse)

La valse des ensembles. De la mathématique à la logique

Abstract : This paper presents the results of a pertinent meditation of the author concerning the concept of „set” from the mathematical theory and its consequences in the logical theory of classes. After all, one of these consequences draws our attention: semantical antinomies. The starting point of these analyses originates in the famous work of Bertrand Russell and Alfred North Whitehead *Principia Mathematica* (1910-1913), authors who developed the well known paradox of „the class of the classes which do not include themselves as element“ and proposed as solution the known „theory of types”. The focus of our paper is the contribution of the Polish logician Stanislav Lesniewski (1886-1939) to the solutioning of the russellian problem of antinomies by distinguishing between mereology, ontology and protothetic.

Key words : set, class, theory of types, semantical antinomy, mereology, ontology, protothetic.

> “Ce qui montre … que la logique est entrée depuis les temps les plus anciens dans cette voie certaine [la voie sûre de la science], c'est que, depuis Aristote, elle n'a pas eu besoin de faire un pas en arrière, à moins que l'on ne regarde comme des améliorations le retranchement de quelques subtilités inutiles, ou une plus grande clarté dans l'exposition, toutes choses qui tiennent plutôt à l'élégance qu'à la certitude de la science. Il est aussi digne de remarquer que, jusqu'ici, elle n'a pu faire un seul pas en avant, et qu'aussi, selon toute apparence, elle semble arrêtée et achevée. En effet, lorsque certains modernes ont pensé l'étendre en y introduisant certains chapitres,…, cela provient de leur ignorance de la nature propre de cette science. Ce n'est pas étendre les sciences, mais les dénaturer, que de confondre leurs limites. Or celles de la logique sont déterminées très exactement par ceci qu'elle est une science qui expose en détail et démontre rigoureusement les seules règles formelles de toute pensée (que cette pensée soit a priori ou empirique, qu'elle ait telle ou telle origine et tel ou tel objet, qu'elle rencontre dans notre esprit des obstacles accidentels ou naturels).
> Si la logique a été si heureuse, elle ne doit cet avantage qu'à son étroite spécialisation, qui l'oblige à faire abstraction de tous les objets de la connaissance et de leur différence, et qui veut que l'entendement ne s'y occupe que de lui-même et de sa forme. Il devait être naturellement beaucoup plus difficile pour la raison d'entrer dans la voie sûre de la science, lorsqu'elle n'a plus seulement affaire à elle-même, mais aussi à des objets. Aussi la

> logique, comme propédeutique, n'est-elle en quelque sorte que le vestibule des sciences ; et lorsqu'il s'agit de connaissances, on suppose sans doute une logique pour les juger, mais leur acquisition, c'est dans ce qu'on appelle proprement et objectivement les sciences qu'il faut la chercher.”
>
> (Kant, *Critique de la raison pure*, préface deuxième édition)

1. Introduction

Il est quelque peu surprenant de constater, aujourd’hui encore, combien la notion d’ensemble a été galvaudée, maltraitée et sortie du contexte d’un certain “art de penser” que devrait privilégier tout logicien. En effet, lorsque l’on suit le long linéament des réflexions que conduisent tant des Cantor que des Russell, force est d’admettre que la manière de penser la notion d’ensemble ou de classe a systématiquement été guidée par l’efficacité fonctionnelle qu’on souhaitait lui faire jouer. De la définition cantorienne aux théories de Zermelo Fraenckel, la notion d’ensemble s’est installée avec la force d’une entité indispensable, avec la logique du premier ordre, à l’établissement des fondements de l’arithmétique. Ainsi, cette notion d’ensemble s’est installée, avec la caution des mathématiques, comme l’expression d’une évidence.

Il n’est pas inintéressant de rappeler les premières réflexions cantoriennes à son sujet. Cantor s’intéresse par nécessité à la notion d’ensemble, contraint qu’il est de devoir parler avec clarté et précision de ses préoccupations de mathématicien et des difficultés qu’il rencontre. C’est en analysant des problèmes de convergence de séries trigonométriques qu’il lui est nécessaire de définir la notion de dérivation d’ensembles de nombres réels. Par cette réflexion, il réalise qu’il existait des ensembles qu’il pouvait dériver une ∞ de fois, une $\infty + 1$ fois, une $\infty + 2$ fois, etc. Il lui était donc indispensable de disposer d’une théorie précisant effectivement cette notion d’ensemble et partant, d’ensemble infini, pour aborder des singularités pour les moins frappantes. L’équipotence entre l’ensemble des entiers naturels et celui des rationnels en est une et laisse songeur. L’existence d’une arithmétique infinie qui rompt avec l’arithmétique usuelle, $\infty + n \neq n + \infty$, n’est également pas sans perturber quelques sages.

Par ailleurs, la définition proposée par Cantor concernant la notion d’ensemble porte une ambiguïté certaine: “Un ensemble est la collection d'objets quelconques de la pensée, considérée comme formant un tout”. Cette définition, étrangement circulaire, accompagnée de principes fondés sur l’ “évidence” conduit à des conséquences problématiques. Je pense au paradoxe de Berry ou aux excès que porte le principe de compréhension qui stipule qu’à toute propriété correspond un ensemble. Explicitons ces difficultés !

Nous le savons tous, tout entier peut être exprimé par des énoncés en langue naturelle ; par exemple, “le plus grand nombre pair plus petit qu’un million” ou, “soixante sept à la puissance trois”. Le premier énoncé compte dix mots, le second, six. Le français usuel compte 30’000 mots, mais les dictionnaires les plus complets en présente 200'000. Les énoncés de n mots sont donc au nombre de $200'000^n$. Beaucoup de ces énoncés n'ont aucun sens, et parmi les autres, il y a ceux qui ne concernent pas les nombres ; l'ensemble des énoncés de n mots décrivant des entiers naturels est donc un ensemble fini et sa puissance est bien plus petite que $200'000^n$. Il est aisé de déduire que l'ensemble des nombres entiers naturels définissables par un énoncé de quinze mots ou moins est fini ; il est également correct d'admettre qu'il existe de nombreux entiers naturels qui n'appartiennent pas à cet ensemble. Il en existe nécessairement un qui est le plus petit et il est possible de le décrire de la manière suivante :

> "Le plus petit entier naturel non désignable par une expression de quinze mots ou moins".

Mais cet entier naturel est explicitement décrit en quinze mots par l'énoncé qui affirme sa non description "Le plus petit entier naturel non désignable par une expression de quinze mots ou moins" ! Un parfum de contradiction se dégage d'un tel énoncé et nécessite de réfléchir sérieusement aux raisons de son émergence. La non-distinction entre langue et métalangue est ici en cause.

Quant au principe de compréhension, il énonce un postulat dont quiconque, dans un premier temps, ne conteste l'apparente validité : "à toute propriété correspond un ensemble d'éléments qui possède ladite propriété". Par ailleurs, il est connu qu'il existe des ensembles d'éléments qui ne se contiennent pas eux-mêmes, tel l'ensemble des entiers naturels N qui ne se contient pas lui-même. De manière contrastée, il existe également des ensembles qui se contiennent eux-mêmes, tel le catalogue C considéré comme un ensemble et qui contient la mention de tous les catalogues existants ; le catalogue C se contient nécessairement lui-même. Sur la base de cet acquis existentiel, il est possible d'expliciter la propriété suivante : "être l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes". Selon le principe de compréhension, un ensemble lui correspond, soit R cet ensemble. Cet ensemble se contient-il lui-même ? Répondre par l'affirmative ne correspond pas à la propriété énoncée d' "être un ensemble qui ne se contient pas lui-même", donc il est non seulement raisonnable, mais surtout nécessaire de répondre par la négative ! Mais agissant ainsi, nous affirmons que R ne s'appartient pas lui-même ; ainsi donc il tombe sous la propriété qui définit l'extension de R. L'ensemble R se contient donc lui-même ! Ceci est inacceptable et nous entraîne dans un cercle vicieux. Il y a donc des intuitions apparemment fondées qui ne le sont pas, et le principe de compréhension est à affaiblir !

Les théories des ensembles officielles se développent en articulant, d'une manière ambiguë, intension et extension, et présentent des particularités pour le moins curieuses : on ose inventer la classe vide, qui en tant que classe devrait posséder quelque élément, mais qui se caractérise par le fait qu'elle n'en possède pas. De plus, il émerge de ces théories qu'un élément unique et l'ensemble constitué de cet élément unique ne peuvent pas être considérés comme la même entité.

En ces temps de grands débats d'idées à propos de la notion d'ensemble, il est fait confiance à l'intuition que l'on partage de certaines notions, mais l'on reste surpris que la formalisation de celles-ci conduise à troubler le système dans lequel elles sont saisies. A mon avis, en ces temps où l'on cherche à façonner les fondements logiques de l'arithmétique, deux alternatives formalisantes restent possibles. L'une, de pure obédience logique, pourrait être concernée par la volonté partagée de préciser et d'expliciter les concepts utilisés de la manière la plus conforme à l' “art de penser”, et de tout mettre en œuvre de manière à déceler la cause d'une contradiction. L'autre, plus conforme au style des mathématiciens, privilégierait la description d'un système avant tout efficace par rapport aux objectifs poursuivis. Le choix de l'efficacité a prévalu !

2. Ce qu'on trouve notamment dans les *Principia Mathematica*

Il est intéressant d'étudier de quelle manière toute cette réflexion s'est déroulée, avec ses doutes, ses impasses, ses questionnements et ses oublis. A cet égard, il est indispensable et très instructif de se pencher une fois encore sur l'œuvre monumentale de Whitehead et Russell, les *Principia Mathematica*.

Whitehead et Russell ont contribué, comme je l'ai déjà mentionné, à forger l'image de la logique de la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Les *Principia Mathematica* (1910-1913) qu'ils rédigent vont profondément marquer l'histoire de la logique contemporaine. Cette monographie exceptionnelle tente d'offrir une solution, voire d'apporter une réponse, à plusieurs problèmes. Il y a d'une part le projet de montrer que la mathématique est une expansion de la logique, un projet qui prolonge celui de Frege, le logicisme. Il y a également la volonté d'exposer un système qui est exempt de toute contradiction ou, en tous les cas, qui évite certaines contradictions mises en évidence alors ; je pense au paradoxe de Cantor et à celui que Russell décèle dans les *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege (1893). Il y a de plus la réalisation d'une synthèse de travaux antérieurs, tels ceux, notamment, de Boole, de Dedekind et de De Morgan. Il y a enfin la mise en place de définitions qui ancrent de manière conceptuelle des notions essentielles en leur attribuant un statut radicalement définitif ; je pense en particulier à la définition de la notion de “classe” et à celle de l' “acte définitoire”.

La reconnaissance de cette œuvre a été éclatante et les conséquences de sa diffusion, nombreuses. En effet, pour avoir relu très soigneusement la première édition des PM, on ne peut être que surpris par le considérable travail de réflexion et de formalisation accompli ; mais l'on ne peut que rester songeur par rapport à la somme des confusions que ces *Principia* contiennent. Langue et métalangue s'articulent en générant de nombreuses ambiguïtés, la distinction entre la syntaxe et la sémantique n'est pas posée et certains concepts fondamentaux de la logiques portent plusieurs significations : une proposition, par exemple, est parfois une entité porteuse de vérité, parfois, une assertion. La lecture méticuleuse de cette première édition n'est pas facile du tout, mais l'attente du contenu synthétique qu'elle offre a, psychologiquement parlant, neutralisé la difficulté objective de la compréhension de son contenu. Quant aux conséquences, j'en mentionnerai quatre :

(a) Les *Principia Mathematica* ont imposé le choix d'un langage, d'un style et d'un point de vue surtout : celle de la logique mathématique du premier ordre. Une certaine unité dans le courant scientifique d'alors s'est cristallisée autour de cette œuvre, offrant peu d'espace à d'autres approches. On y présente la logique comme une théorie axiomatique fermée qui contient tout ce que la logique doit offrir. De ce fait, aucune expansion n'est possible sans une révision en profondeur de ses significations primitives.

(b) La logique classique qui se dessine alors n'est pas aussi neutre qu'on le souhaiterait. La logique des propositions contient seize opérateurs binaires et quatre unaires. Pourquoi ceux-là et que ceux-là ? Quant à la logique des prédicats, elle contient des symboles de propriété et de relation. Ceux-ci ont ceci de particulier qu'ils ne prennent pour arguments que des symboles de variables et de constantes d' "individus" ! Pour quelles raisons ne s'est-on intéressé qu'à ces catégories-là ? La réponse à cette question-là est complexe et relève d'une étude de l'histoire de la logique, et plus spécifiquement de l'étude de la complicité que la logique soutient avec la mathématique.

> "Cet asservissement initial de la logique aux mathématiques classiques a conduit la première à concentrer son analyse sur les relations auxquelles les mathématiques faisaient appel, c'est-à-dire, d'abord sur les relations binaires et, plus exactement, sur un type précis de relations binaires, à savoir celles qui admettent comme arguments deux individus." (Gardies, 1975 : 275)

La sélection de l'ensemble des opérateurs logiques que cette logique contient ainsi que le choix des principes qui règlent ces systèmes relèvent également de cette complicité. Frege lui-même était conscient que la logique en tant que saisie des formes que revêt la pensée avait "une signification qui débordait le cadre de la mathématique" (Frege, 1962 : 95). Mais le souci d'assumer les fondements des mathématiques avec une mentalité de mathématicien, et non pas de logicien, a été plus fort que l'appel à la réalisation d'une logique de plus grande expansion. Ainsi, oublie-t-on parfois que la logique décrite dans les PM est la logique mathématique et qu'elle n'épuise pas le tout de la logique. Ceci n'explique rien ! Je souligne simplement l'influence que les mathématiques classiques ont eue sur la logique lorsqu'elle était inscrite dans le projet logiciste.

(c) La référence russellienne à la mathématique et à la théorie des ensembles a également contribué à marquer toute une manière d'appréhender la notion de classe, une notion qui, en se conceptualisant progressivement, perd toute relation avec la perception naïve qu'on peut en avoir, et occulte toute une discussion entre ce qui relève du distributif et ce qui est concerné par la vision collective. Cette rupture avec une certaine réalité classificatoire n'attribue à la définition de classe qu'un rôle désincarné, celui de symbole incomplet.

> "The symbols for classes, like those for descriptions, are, in our system, incomplete symbols : their « uses » are defined, but they themselves are not assumed to mean anything at all. That is to say, the uses of such symbols are so defined that, when the « definiens »is subtituted for the « definiendum ». there no longer remains any symbol which could be supposed to represent a class. Thus classes, so far as we introduce them, are merely symbolic or linguistic conveniences, not genuine objects as their members are if they are individuals. »" (Whitehead & Russell, 1910 : 75).

(d) Enfin, et ceci est en relation directe avec la nature conceptuelle des théories axiomatiques traditionnelles offrant des systèmes fermés, certaines directives inférentielles sont négligées. Il en va ainsi, notamment, du rôle attribué à la procédure définitoire. Il est en effet surprenant de constater que, dans ces systèmes classiques, la définition n'est, théoriquement parlant, rien d'autre qu'une abréviation, qu'elle n'est appelée à jouer aucun rôle dans le raisonnement, qu'elle n'est présente que pour des raisons de convenance pratique, de commodité linguistique. S'il y a surprise, c'est que dans l'activité cognitive d'un sujet, la définition relève d'une démarche particulièrement complexe et dont la finalité est entre autres choses, de modifier une connaissance, de donner accès à une connaissance nouvelle. Il s'agit d'un acte inférentiel ! Bien que Russell le reconnaisse il y a quelque cent dix ans, il se contentera de cette pratique abréviative.

> "It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoreticaly, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet in the development of a subject, they always require a very large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis." (Russell, 1956 : 63. 1ère édition 1903)

Aujourd'hui encore, et malgré les (voire, à cause des) travaux des Hilbert, Tarski, Gödel et autres épigones, l'influence des PM reste présente dans la perception d'une certaine logique et donc dans ce qu'elle donne à penser d'elle-même. Mais il y a d'autres manières axiomatiques de présenter la logique, il y a des espaces logiques plus généreux et plus dynamiques que celui hérité du logicisme, enfin, il ne faut jamais oublier que la logique issue du programme logiciste ne suffit pas, et de loin pas, à rendre compte de la pensée dans l'efficace de sa fonction rationnelle. Elle a été façonnée en fonction d'une visée avant toute chose fonctionnelle ; elle n'a pas été conduite pour habiter son destin consistant à expliciter les mécanismes de l' "art de penser".

Il est indispensable de reconnaître ici que les PM sont une œuvre remarquable et gigantesque, et comme telle, elle a su séduire par nécessité, mais elle a également étouffé et occulté d'autres formes de développements logiques moins ad hoc que l'œuvre whito-russellienne. Dans la suite de mon propos, j'évoquerai la démarche d'un logicien qui découvre les PM tardivement et sans influence préalable ; esprit libre et fort, il en découvre les incohérences et les incongruités, et relève le défi d'en proposer une alternative non pas d'obédience mathématique, mais purement logique. Il s'agit du logicien polonais Stanislav Lesniewski (1886-1939). D'une certaine manière, l'œuvre logique de Lesniewski est le produit d'une réaction d'esprit purement logique contre les PM. C'est encore, pourrais-je dire, une réussite à porter au crédit de Whitehead et Russell.

Dans la suite de mon article, je mettrai en scène les réactions de Lesniewski face à la lecture des PM, puis esquisserai les théories logiques qu'il crée pour résoudre quelques problèmes que les auteurs des PM ont écartés et pour réintroduire la dimension collective de la classe que toute la réflexion traditionnelle associée au logicisme a étouffée.

3. Lesniewski lecteur des *Principia Mathematica*

Logiquement parlant, l'année 1911 est une année déterminante pour Lesniewski, encore étudiant. En effet, la lecture de "Ueber den Satz von Widerspruch bei Aritotles" (Lukasiewicz, 1910) le marque profondément. A travers cet ouvrage, il découvre la logique symbolique et l'antinomie dite russellienne. Cet événement va déterminer doublement son orientation intellectuelle. Il va choisir de poursuivre ses recherches dans le champ de la logique formelle, mais cette orientation sera fortement teintée de ses convictions et intuitions profondes de ce que cette discipline doit être, convictions qui s'écartent, comme on va le voir, de la tradition russellienne. Suite à cette lecture, Lesniewski se plonge alors littéralement dans l'étude des œuvres de Frege, de Husserl, mais surtout dans celles de Whitehead et Russell : le monumental *Principia Mathematica*. Cette découverte du formalisme et celle du paradoxe russellien se confond, dans un premier temps tout au moins, avec un refus d'une telle approche formelle. Lecteur attentif des PM, Lesniewski les décortique et les analyse avec une rigueur extrême. Cette lecture minutieuse qui dure quatre ans (1914-1918) lui pose problème. Il ne comprend pas le rôle du signe d'assertion, il n'accepte pas la définition de la classe vide et est confondu par la connaissance qui lui est révélée du concept de classe. Par ailleurs, Lesniewski refuse toute solution du paradoxe de Russell qui ne se contente que de l'éviter et non pas d'en déceler les causes. Eviter la formulation des antinomies, ce que fait la théorie des types proposée par Russell, n'est pas, de mon point de vue, une attitude de logicien qui se doit de les surmonter. La lecture des PM développera chez Lesniewski, et pour un certain temps, une réelle méfiance à l'égard d'une logique symbolique qui lui apparaît comme dépouillée de tout fondement intuitif. Ses réactions méritent une attention toute particulière et pour la mieux comprendre, je m'appuierai sur une citation des PM.

> “It is an old dispute whether formal logic should concern itself mainly with intensions or with extensions. In general, logicians whose training was mainly philosophical have decided for intensions, while those training was mainly mathematical have decided for extensions. The facts seem to be that, while mathematical logic requires extension, philosophical logic refuses to supply anything except intensions. Our theory of classes recognizes and reconciles these two apparently opposite facts, by showing that an extension (which is the same as a class) is an incomplete symbol, whose use always acquire its meaning through a reference to intension.
>
> In the case of descriptions, it was possible to « proove » that they are incomplete symbols. In the case of classes, we do not know of any equally definite proof, though arguments of more or less cogency can be elicited from the ancient problem of the One and the Many*. It is not necessary for our purposes, however, to assert dogmatically that there are no such things as classes. It is only necessary for us to show that the incomplete symbols which we introduce as represntatives of classes yield all the propositions for the sake of which classes might be thougt essential. When this has been shown, there mere principle of economy of primitive ideas leads to the non introduction of classes except as incomplete symbols.
>
> * Briefly, these arguements reduce to the folowing : if there is such an object as a class, it must be in some sens « one » object. Yet it is only of classes that « many » can be predicated. Hence, if we admit classes as objects, we must suppose that the same object can be both one and many, which seems impossible.” (Whitehead and Russell, 1910 : 75)

De ce passage, Lesniewski relève plusieurs points :

(a) Les symboles de classe sont utilisés comme commodités linguistiques ou symboliques. Rien n’est dit de ce que peut être une classe, sinon qu’elle est la même chose qu’une extension et qu’elle n’est pas un objet authentique.

(b) Le refus d’accepter la classe comme un objet ; cette impossibilité se soutient du fait qu’un objet ne peut être un et plusieurs.

(c) Une imprécision gênante dans ce qui est écrit, qui ne peut que désécuriser davantage un lecteur en quête d’informations précises. En effet, le fait que “The symbol for classes…are incomplete symbols” et “ ...an extension (which is the same as a class) is an incomplete symbol…)” ne contribue pas à donner de la classe une définition claire !

J’ai osé relire les trois chapitres de l’introduction des PM avec le regard critique que l’on attribue à Lesniewski, c'est-à-dire en recherchant une définition de contenu. Dans cette perspective, mon attente de trouver une définition limpide de la notion d’extension a été déçue. Voici ce que j’ai trouvé :

> "When two functions are formally equivalent, we may say that *they have the same extension*. In this definition, we are in close agreement with usage. We do not assume that there is such a thing as an extension : we merely define the whole phrase « having the same extension ».
> …
> Since extensional functions are many and important, it is natural to regard the extension as an object, called a class, which supposed to be the subject of all the equivalent statements about various formally equivalent functions." (Whitehead and Russell, 1910 : 77)

Lesniewski recherche une définition concrète, réelle de ce qu'est une classe. Dans cet esprit, il est manifeste que le recours à la définition de l'extension pour éclairer celle de classe ne l'aide en rien. Il perçoit que Whitehead et Russell, comme Frege du reste, mettent en doute l'existence des classes. Le sentiment qui l'envahit à la lecture des œuvres de ces auteurs est pour le moins teinté d'ironie !

> "De la notion de « classe » de Whitehead et Russell, comme de celle d' « extension de concept » de Frege, émane une odeur particulière, celle des échantillons mythiques provenant de la riche exposition des objets « inventés ». Je ne peux pas m'empêcher d'être solidaire -à crédit- avec les doutes des auteurs concernant l'existence de telles classes." (Lesniewski, 1927 : 204-205 ; traduction Miéville)

Pour Lesniewski, la classe se doit d'être l'expression nominalisée d'une entité "réelle", elle ne saurait être uniquement une simple commodité symbolique ou linguistique. La classe renvoie ainsi à un objet, un "amas", un agrégat d'ingrédients. Dans cette perspective, parler de l'existence d'une classe fait sens. Whitehead et Russell voudrait bien considérer la classe de cette manière. Somme toute, la notion de classe est un produit de l'observation du "monde" et de la manière d'en parler. Les présupposés qui lui sont associés n'autorisent cependant plus à lui attribuer une dimension existentielle. Ils le reconnaissent volontiers :

> "Nous avons déjà vu que les classes ne peuvent pas être regardées comme des espèces d'individus, à cause de la contradiction relative aux classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes… Nous ne pouvons pas considérer les classes d'une manière purement extensionnelle…comme des amas ou des agglo-mérations. Si nous étions tentés de le faire, nous ne pourrions comprendre comment il peut y avoir une classe telle que la classe nulle, qui n'a pas de membre du tout et ne peut être considérée comme un « amas » ; nous trouverions aussi bien difficile de comprendre comment il arrive qu'une classe qui n'a qu'un membre ne soit pas identique à ce membre." (Russell, 1970 : 217 ; première édition 1918)

La position de Russell, ferme dans ce paragraphe, l'était moins dans les PM :

> "A class (which is the same as a manifold or aggregate) is all the objects satisfying some propositional function." (Whitehead and Russell, 1910 : 24)

Il est intéressant de relever que la critique sévère formulée par Lesniewski à l'égard des PM naît notamment d'une incompréhension eu égard à l'intention de leurs auteurs. Whitwhead et Russell attribuent une grande importance au formalisme dans l'efficace de sa fonctionnalité. Lesniewski, lui, fait une lecture qui ne quitte jamais ce qui relie les formes au réel. Il ne peut donc trouver dans les PM ce qu'ils ne donnent pas à voir. Mais il y une autre raison qui justifie sa difficulté à saisir ce que voudrait contenir les PM. En effet, Lesniewski est habité par les exigences d'un pur logicien, il analyse un système avec la certitude de n'éviter aucune ambiguïté, de saisir et de clarifier toute confusion et, par dessus tout, de formuler les concepts de manière à résoudre (et non pas éviter) toute contradiction. Sa longue et studieuse lecture des PM aboutit à la conviction fondée que l'origine de la contradiction russellienne trouve son siège dans une confusion avérée de deux notions de classe, celle qui est à même de gérer la manière distributive d'aborder une extension d'éléments partageant la même propriété caractéristique, et celle, agrégative, qui exprime les relations de parties au tout qu'une entité présente. Il pointe également les difficultés issues d'une théorie classique des ensembles qui est très efficace pour aborder le problème de la définition des nombres, mais qui n'a aucun fondement intuitif. Elle est une théorie conçue de manière ad hoc pour des raisons fonctionnelles, et pour ce faire elle a été contrainte à disposer de définitions qui n'ont aucune appréhension intuitive ! Cela justifie théoriquement la définition d'une classe vide qui ne contient aucun élément alors que toute classe est définie par ses éléments ; cela justifie encore la non-identité d'un élément et du singleton constitué à partir de cet élément. Cette relation possède un sens théorique nécessaire, mais aucune cohérence intuitive ! Il y a davantage que cette monumentale confusion entre la dimension distributive et la dimension agglomérative sous-jacente au terme de classe. Au sens où Whitehead et Russell en font usage, il y a une distinction qui n'est pas maîtrisée entre la notion d'extension, par exemple celle-ci : a, b, c, et celle de la classe associée à cette extension C ={a, b, c}. Cet amalgame a pollué et, parfois, pollue encore, de nombreux discours attachés à la théorie des ensembles.

Ce qui est remarquable, c'est que la notion de classe agrégative ou agglomérative a été utilisée et discutée de tout temps en coordination avec la notion de classe distributive ; soudainement, lorsque l'usage de la classe extensionnelle est appelée à remplir un objectif de pure mathématique, la notion agrégative disparaît du champ d'investigation et de réflexion. Dès le début de l'histoire de la philosophie, la notion agrégative est mentionnée et utilisée (les présocratiques, Platon, Aristote, Boethius, …). On retrouve cet intérêt chez les scolastiques (notamment chez Abelard, St Thomas d'Aquin, Albert de Saxe, …). Plus près de nous, Kant, Brentano et Husserl (1901) s'y intéressent ! Au temps de l'émergence de la théorie des ensembles et du logicisme, et notamment au temps de l'élaboration des PM, les mathématiciens focalisent leurs réflexions sur la notion distributive à l'exclusion de celle, agglomérative. C'est une réaction aux PM qui provoque la renaissance d'une réflexion sur cette notion agrégativo-agglomérative dans le cadre d'un système logique.

4. Esquisse des théories développées par Stanislas Lesniewski

Lesniewski que je pense profondément attaché à ses responsabilités de logicien, va développer sa réflexion de manière à résoudre l'antinomie de Russell et non pas à l'éviter, comme le fait Whitehead et Russell avec leur théorie des types. Ce faisant, il sera conduit à façonner trois théories : la méréologie, l'ontologie et la protothétique.

La méréologie est le résultat de ses investigations à propos du paradoxe dit russellien. Lesniewski démontre que l'origine dudit paradoxe provient d'une confusion entre l'acception agrégative, respectivement distributive, que recouvre le terme de classe. Lesniewski montre qu'il ne faut pas confondre, au risque d'introduire une contradiction, "a est parmi les éléments d'une extension" et "a est un ingrédient d'une totalité". Il va donc développer et formaliser, dans un premier temps, la méréologie, la théorie des classes agrégatives ou, étymologiquement parlant, la théorie des parties au tout.

Quant à l'ontologie, elle est l'aboutissement de la réflexion de Lesniewski à propos du traitement logique, d'une part concernant la manière de traiter l'inhérence d'une propriété à un sujet et d'autre part la manière de saisir le jeu de l'extensionalité. L'ontologie est à sa façon une logique des prédicats d'ordre supérieur, ou un calcul des noms d'ordre supérieur dans lequel la quantification n'a aucun import existentiel ; elle est une logique non-contradictoire, universelle, libre et ontologiquement neutre. Lesniewski y distingue la catégorie des noms de ce que ceux-ci nomment, et développe une quantification libre de tout import existentiel. L'ontologie fonde une théorie des ensembles non-contradictoire, propriété qui n'a pas pu être attribuée à la théorie classique des ensembles. Ce résultat de non-contradiction constitue, en soi et pour le moins, un beau succès !

Enfin, la protothétique est développée, offrant un système quantifié des propositions d'ordre supérieur. Quelque constante que ce soit conçue sur une combinatoire issue de la catégorie fondamentale des propositions peut y être définie. Lesniewski va mettre en évidence, c'est-à-dire, démontrer, qu'en faisant usage de ses propres systèmes, l'objectif fondationnel de l'arithmétique peut être atteint, et cela sans abandonner l'exigence de la logique quand elle choisit d'être sous la bannière de l' "art de penser". Lesniewski propose de manière ultime une formalisation de la métalangue qu'il utilise pour développer de manière progressive, dans l'espace et le temps, les logiques maximales qu'il a conçues.

5. Conclusion

Un double constat peut être posé. D'une part, il est manifeste que la théorie des classes soumise à la hiérarchisation des types qu'exposent Whitehead et Russell est suffisante pour le rôle qu'ils veulent bien lui attribuer, celui d'une théorie efficace pour rendre compte de leur construction logiciste. D'autre part, leur préoccupation n'est pas de représenter dans un système formalisé la perception qu'ils auraient de la dimension distributive, ni de l'associer à la perception d'un tout collectif constitué de ses ingrédients. Ma thèse est que Whitehead et Russell agissent en mathématiciens qui ont besoin d'une théorie des ensembles efficace et d'une base logique minimale pour fonder leur projet logiciste. De mon point de vue, ils n'agissent pas en logiciens qui ont à cœur de résoudre les problèmes paradoxaux qu'ils rencontrent et qui veulent investiguer dans sa totalité, d'une part les mécanismes de la raison dans leurs parcours déductifs et d'autre part, la double perception de la notion de classe telle qu'elle est véhiculée de manière vernaculaire. Lesniewski, habitant profondément l'essence de la logique en tant qu' "art de penser", va s'attacher, avec succès, à honorer plusieurs défis. Il y a la résolution de l'antinomie de Russell ; il y a la formalisation et l'axiomatisation de la théorie des classes collectives ; il y a également la formalisation et l'axiomatisation des fondements d'un calcul des prédicats d'ordre supérieur qui règle totalement le traitement du distributif ; de plus, il y a la formalisation et l'axiomatisation d'un calcul des propositions d'ordre supérieur. Enfin, tous ces systèmes sont non-contradictoires et maximaux en ce sens qu'ils permettent d'accéder à toute constante les concernant, de quelque catégorie que ce soit !

Sur la piste de danse que l'histoire a construite, il est regrettable que la valse des ensembles qui a été privilégiée, sinon imposée, ait été celle issue d'une théorie classique, certes efficace, mais bien dénuée de fondements intuitifs raisonnables. Les mathématiciens ont ainsi imposé un traitement ensembliste purement théorique au détriment de constructions associées à une réflexion de pure logique. Ces constructions existent, nous les avons mentionnées et rencontrées, et ces deux autres valses déviantes, purement extensionnelle d'une part, et effectivement collective d'autre part, méritent d'être sorties de la confidentialité dans laquelle l'histoire les a confinées.

Bibliographie

FREGE, Gottlob

[1893] *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, vol 1: Verlag Hermann Pohle.

[1903] *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, vol 2: Verlag Hermann Pohle.

[1962] *Grundgesetze der Arithmetik,* Hildesheim : Olms

GARDIES, Jean-Louis

[1975] *Esquisse d'une grammaire pure,* Paris : Vrin.

GESSLER, Nadine

[2005] *Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski*. Fasc. III : *La méréologie*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique.

JORAY, Pierre & MIEVILLE Denis

[2008] (éds) *Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques. Actes du colloque de Neuchâtel, 19-20 octobre 2007,* Université de Neuchâtel : Travaux de logique n° 19.

LESNIEWSKI, Stanislaw

[1927] O podstawach matematyki, *Przeglad Filozoficzny* 30, 164-206 ; 31, 261-291 ; 32, 60-101 ; 33, 77-105 et 142-170)

[1929] Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fundamenta Mathematicae* 14 : 1-81.

[1992] *Collected Works I, II,* S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett (eds), Varsovie : Polish Scientific Pub. Dordrecht, Boston : Kluwer.

[1989] Sur les fondements de la mathématique. Fragments (discussion préalable, méréologie, ontologie). Trad. G. Malinowski, Paris : Hermès.

MIEVILLE, Denis

[1984] *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Protothétique-Ontologie-Méréologie.* Berne, Francfurt, New York : P. Lang.

[2001] *Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski.*Fascicule I : La protothétique. Université de Neuchâtel : Travaux de logique.

[1999a] *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique*, (Miéville éd.), Université de Neuchâtel : Travaux de logique n° 13.

[1999b] Expansion catégorielle en logique, in Miéville [1999a] : 1-41.

[2004] *Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski.*Fascicule II : L'ontologie. Université de Neuchâtel : Travaux de logique.

[2008] D'une définition à l'autre, in Joray & Miéville (éds) [2008] : 159-175.

[2009] *Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski.*Fascicule VI : La métalangue. Université de Neuchâtel : Travaux de logique.

RICKEY, V. Frederick

[1972] Axiomatic Inscriptional Syntax, Part I : The Syntax of Protothetic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13 : 1-33.

[1973] Axiomatic Inscriptional Syntax, Part II : The Syntax of Ontology, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 14 : 1-52.

RUSSELL, Bertrand

[1906] The Theory of Implication. *American Journal of Mathematics*: 159-202.

[1956] (1ère ed. 1903) *The principles of Mathematics*, London : Allen & Unwin

[1970] (1ère ed. 1919) Introduction à la philosophie mathématique (Trad. P. Devaux), Paris : Payot

WHITWHEAD, Alfred North & RUSSELL, Bertrand

[1910, 1912, 1913] *Principia Mathematica,* Cambridge : CUP.